

Total No. of Printed Pages—8

2 SEM FYUGP MTHC2

2024

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC2

(Real Analysis and Differential Equations)

Full Marks : 80

Pass Marks : 24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

SECTION—A

(Real Analysis)

UNIT—I

1. (a) সত্য নে অসত্য লিখা :

• Write True or False :

বন্ধ অন্তৰাল $[x, x]$ ক আমি একক সংহতি $\{x\}$ হিচাপে
লিখিব পাৰো।

1

The closed interval $[x, x]$ can be written
as the singleton set $\{x\}$.

(b) বাস্তৱ সংখ্যা (\mathbb{R})ৰ পূৰ্ণতাৰ ধৰ্মটো লিখা।

1

State the completeness property of \mathbb{R} .

(2)

(c) যদি $a \in \mathbb{R}$ যাতে $a \cdot a = a$, তেজ্জে প্রমাণ কৰা যে হয়
 $a = 0$ অথবা $a = 1$. 2

If $a \in \mathbb{R}$ such that $a \cdot a = a$, then prove
that either $a = 0$ or $a = 1$.

(d) যদি $a \in \mathbb{R}$ আৰু $a \neq 0$, তেজ্জে প্রমাণ কৰা যে
 $a^2 > 0$. 2

If $a \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$, then prove that $a^2 > 0$.

(e) সংহতিৰ সীমা বিন্দুৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। বলজান'-
ওৰাৰাচ্ট্ৰেছৰ সূত্রটো (সংহতিৰ বাবে) লিখা। $I+1=2$

Define limit point of a set. Write the
Bolzano-Weierstrass theorem for set.

ধৰা হ'ল S এটা \mathbb{R} ৰ অবিচ্ছিন্ন আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ
উপসংহতি আৰু $a \in \mathbb{R}$ যি কোনো এটা সংখ্যা। যদি
 $a+S = \{a+s : s \in S\}$, তেজ্জে প্রমাণ কৰা যে

$$\sup(a+S) = a + \sup S \quad 4$$

Let S be a non-empty subset of \mathbb{R} such
that S is bounded above. Let $a \in \mathbb{R}$
be any number. If $a+S = \{a+s : s \in S\}$,
then prove that

$$\sup(a+S) = a + \sup S$$

অথবা / Or

যদি $y > 0$, তেজ্জে দেখুওৱা যে $n_y \in \mathbb{N}$ ৰ কাৰণে
 $n_y - 1 \leq y \leq n_y$.

If $y > 0$, then show that there exists
 $n_y \in \mathbb{N}$ such that $n_y - 1 \leq y \leq n_y$.

24P/1137

(Continued)

(3)

(g) যদি x আৰু y দুটা যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা যাতে
 $x < y$, তেজ্জে দেখুৱাব লাগে যে আমি এটা $r \in \mathbb{Q}$ পায়
যাতে $x < r < y$. 3

If x and y are any real numbers with
 $x < y$, then show that there exists a
rational number $r \in \mathbb{Q}$ such that
 $x < r < y$.

(h) প্রমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি \mathbb{R} গণনীয় নহয়। 5
Show that the set of real numbers \mathbb{R} is
not countable.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে এনেকুৱা কোনো পৰিমেয় সংখ্যা r পোৱা
নাযায় যাতে $r^2 = 2$.

Show that there does not exist a rational
number r such that $r^2 = 2$.

UNIT—II

2. (a) একদিশি অভিসাৰী উপপাদ্যটো লিখা। 1

State monotone convergence theorem.

(b) শ্ৰেণীৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়কটো লিখা। 1

State Cauchy criterion for series.

(c) প্রমাণ কৰা যে এটা বাস্তৱ অনুক্রমৰ অতিবেছি এটা
সীমাহে থাকিব পাৰে। 2

Prove that a sequence in \mathbb{R} can have at
most one limit.

24P/1137

(Turn Over)

(4)

- (d) যদি x_n অনুক্রমটো x লৈ অভিসাৰী আৰু y_n অনুক্রমটো y লৈ অভিসাৰী হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $x_n y_n$ অনুক্রমটো xy লৈ অভিসাৰী হ'ব। 4

If x_n and y_n are two sequences such that x_n converges to x and y_n converges to y , then show that $x_n y_n$ converges to xy .

- (e) দেখুওৱা যে x_n অনুক্রমটো অপসাৰী য'ত

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$
 4

Show that the sequence x_n with

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

is divergent.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে x_n অনুক্রমটো অভিসাৰী য'ত

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Show that the sequence x_n with

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

is convergent.

- (f) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ শ্ৰেণীটো অপসাৰী বুলি দেখুওৱা। 3

Show that the series $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ is divergent.

(5)

- (g) তলৰ যি কোনো এটা শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 5
 Test the convergence of any one of the following series :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} x^n, x > 0$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$

SECTION—B

(Differential Equations)

UNIT—III

3. (a) অৱকল সমীকৰণৰ বিশেষ সমাধান বুলিলে কি বুজা ? 1
 What do you mean by particular solution of a differential equation?

- (b) তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা অনুকলনীয় উৎপাদক উলিওৱা : 1

Find an integrating factor of the following differential equation :

$$t^2 \frac{dx}{dt} + x = 1$$

- (c) তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 2
 Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

- (d) দেখুওৱা যে, $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ হ'ল
 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ অৱকল সমীকৰণৰ এটা বহিৰলিখিত
 সমাধান।

2

Show that $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ is an explicit solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

- (e) তলৰ যি কোনো তিনিটা অৱকল সমীকৰণ সমাধান কৰা :

3×3=9

Solve any three of the following differential equations :

(i) $(xy + 2x + y + 2)dx + (x^2 + 2x)dy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$

(iii) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

(iv) $(y\sec^2 x + \sec x \tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$

UNIT—IV

4. (a) n মাত্ৰাবিশিষ্ট সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

1

Define n th order homogeneous linear differential equation.

- (b) যদি এটা ফ্ৰমক সহগযুক্ত সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সহায়ক সমীকৰণৰ মূল $2 \pm 3i$ হয়, তেন্তে অৱকল সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ বা সামূহিক সমাধান নিৰ্ণয় কৰা।

1

If the auxiliary equation has the root $2 \pm 3i$, then write the general solution of the corresponding homogeneous linear differential equation with constant coefficients.

- (c) দ্বিমাত্ৰিক সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ বাবে সমাৰোপন নীতিটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

1+3=4

State and prove the principle of superposition for homogeneous linear differential equation of 2nd order.

- (d) n টা ফলনৰ এটা সংহতিৰ বাবে বনফ্লিয়ানৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। দেখুওৱা যে,

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানকেইটা ক্ৰমে e^x , e^{-x} আৰু e^{2x} বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ। অৱকল সমীকৰণটোৰ সামূহিক সমাধানটো লিখা।

1+3+1=5

Define Wronskian for a set of n functions. Show that the solutions e^x , e^{-x} and e^{2x} of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

are linearly independent. Write its general solution.

(e) অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

6

Use the method of undetermined coefficients to solve $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$.

অথবা / Or

প্ৰাচলৰ ভেদ/বিচৰণ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা

Use the method of variation of parameters to solve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$$

(f) সমাধান কৰা (যি কোনো দুটা) :

4×2=8

Solve (any two) :

$$(i) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$$

$$(ii) \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

$$(iii) \frac{d^4y}{dx^4} + m^4y = 0$$

★★★