

Total No. of Printed Pages—7

3 SEM FYUGP GECMTH3B

2 0 2 4

(December)

MATHEMATICS

(Generic Elective Course)

Paper : GECMTH3B

(**Combinatorial Mathematics**)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. ভলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

(a) দ্বিতীয় প্রকাৰৰ ষ্টাৰলিং সংখ্যাটো লিখা । 1

Write the Stirling number of the second kind.

(b) পুনৰাবৃত্তিৰ অনুমতি নিদিলে 7টা বস্তুৰ গোটৰ পৰা 4টা বস্তু কিমান ধৰণে নিৰ্বাচন কৰিব পাৰি ? 2

In how many ways can you select 4 objects from a set of 7 objects if repetition is not allowed?

- (c) 3টা শিশুৰ মাজত 7টা একেধৰণৰ আপেল বিতৰণ কৰাৰ উপায়ৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা, যদিহে প্ৰতিটো শিশুৱে অন্তত এটা আপেল পায়।

2

Find the number of ways to distribute 7 identical apples among 3 children, if each child gets at least one apple.

- (d) যদি ${}^nC_{r-1} = 36$, ${}^nC_r = 84$, ${}^nC_{r+1} = 123$, তেন্তে n আৰু r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3

If ${}^nC_{r-1} = 36$, ${}^nC_r = 84$, ${}^nC_{r+1} = 123$, then find the value of n and r .

- (e) দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $(x+3)^4$ সম্প্ৰসাৰণ কৰা।

4

Expand $(x+3)^4$ using the binomial theorem.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

Prove that ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

2. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

- (a) 1, 2, 3 ৰ ডিৰেঞ্জমেন্টৰ সংখ্যা হ'ল ____।
(খালী ঠাই পূৰণ কৰা)

1

The number of derangements of 1, 2, 3, is ____.

(Fill in the blank)

- (b) অন্তৰ্ভুক্তি আৰু বৰ্জনৰ নীতি ব্যৱহাৰ কৰি 1ৰ পৰা 100ৰ মাজৰ পূৰ্ণসংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা যিবোৰ 2, 3 বা 5 ৰে হৰণ কৰিব পাৰি।

2

Using the principle of inclusion and exclusion, find the number of integers between 1 to 100 that are divisible by 2, 3 or 5.

- (c) এটা ক্ৰমবিন্যাসত inversion formula ই inversion formula ৰ সংখ্যা গণনা কৰাত কেনেদৰে সহায় কৰে, ব্যাখ্যা কৰা।

2

Explain how the inversion formula helps in counting the number of inversions in a permutation.

- (d) যদি A আৰু B এটা সসীম সাৰ্বজনীন গোট U ৰ উপগোট হয়, তেতিয়া প্ৰমাণ কৰা যে

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

3

Let A and B be subsets of a finite universal set U . Then prove that

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

অথবা / Or

ডিৰেঞ্জমেন্টৰ সংজ্ঞা দিয়ক। 1, 2, 3, 4, 5 ৰ ডিৰেঞ্জমেন্টৰ সংখ্যা গণনা কৰা।

Define derangement. Calculate the number of derangement of 1, 2, 3, 4, 5.

- (e) 1 আৰু 500 ৰ মাজৰ কিমানটা পূৰ্ণসংখ্যক (i) 3 বা 5 ৰে হৰণ কৰিব পাৰি আৰু (ii) 3 ৰে হৰণ কৰিব পাৰি কিন্তু 5 বা 6 ৰে হৰণ নহয়? $2+2=4$

How many integers between 1 and 500 are (i) divisible by 3 or 5 and (ii) divisible by 3 but not by 5 or 6?

3. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

- (a) $\Rightarrow$ ক্ৰমৰ জেনেৰেটিং ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define generating function of a sequence.

- (b) জেনেৰেটিং ফলন $(3+x)^3$ ৰ সৈতে সংগতি ৰাখি ক্ৰমটো নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the sequence corresponding to the ordinary generating function $(3+x)^3$.

- (c) $a = 1, 1, 1, 1, \dots$ ক্ৰমটোৰ বাবে ঘাতীয় জেনেৰেটিং ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the exponential generating function for the sequence $a = 1, 1, 1, 1, \dots$.

- (d) $a_k = 2+3k$ হ'লে $\{a_k\}$ ক্ৰমটোৰ জেনেৰেটিং ফলন নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the generating function of a sequence $\{a_k\}$ if $a_k = 2+3k$.

- (e) প্ৰমাণ কৰা যে যদি a ৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলন $f(x)$ আৰু b ৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলন $g(x)$ হয়, তেন্তে $a+b$ ৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলন $f(x)+g(x)$. 3

Prove that if $f(x)$ is the generating function for a and $g(x)$ is the generating function for b , then $f(x)+g(x)$ is the generating function for $a+b$.

অথবা / Or

3, -3, 3, -3, 3, -3, ... ক্ৰমৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা।

Find the generating function for the sequence 3, -3, 3, -3, 3, -3, ...

4. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

- (a) যদি $a_1 = 2$, তেন্তিয়া $a_n = a_{n-1} + 3$ ক্ৰমৰ পৰৱৰ্তী দুটা পদ লিখা। 1

Write the next two terms of the sequence $a_n = a_{n-1} + 3$ with $a_1 = 2$.

- (b) যদি $\{a_n\}$ এটা ক্ৰম যিয়ে পুনৰাবৃত্তিৰ সম্পৰ্ক $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ য'ত $n = 2, 3, 4, \dots$ আৰু $a_0 = 3, a_1 = 5$ সম্পৰ্কক সন্তুষ্ট কৰে। a_2 আৰু a_3 নিৰ্ণয় কৰা। 2

Let $\{a_n\}$ be a sequence that satisfies the recurrence relation $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n = 2, 3, 4, \dots$ and suppose that $a_0 = 3$ and $a_1 = 5$. Find a_2 and a_3 .

- (c) $\{a_n\}$ ক্রমটো $n=2, 3, 4, \dots$ ৰ বাবে পুনৰাবৃত্তি সম্পৰ্ক $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ ৰ সমাধান নেকি নিৰ্ণয় কৰা য'ত প্ৰতিটো অঋণাত্মক n ৰ বাবে $a_n = 3n$. 2

Determine whether the sequence $\{a_n\}$ is solution of the recurrence relation $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n=2, 3, 4, \dots$ where $a_n = 3n$ for every non-negative n .

- (d) $k \geq 1$ ৰ বাবে $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 3a_k + 1$ দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত ক্ৰমৰ প্ৰথম পাঁচটা পদ লিখা। a_n ৰ বাবে সূত্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা। 3

Write down the first five terms of the sequence defined by $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 3a_k + 1$ for $k \geq 1$. Derive the formula for a_n .

অথবা / Or

$a_n = a_{n-1} + 3$ আৰু $a_1 = 3$ দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত ক্ৰমৰ প্ৰথম পাঁচটা পদ লিখা লগতে a_n ৰ বাবে সূত্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা।

Write down the first five terms of the sequence defined by $a_n = a_{n-1} + 3$ and $a_1 = 3$. Also derive the formula for a_n .

- (e) প্ৰাৰম্ভিক অৱস্থা $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ আৰু $a_2 = -1$ ৰ সৈতে পুনৰাবৃত্তি সম্পৰ্ক $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ ৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the solution to the recurrence relation $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ with initial conditions $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ and $a_2 = -1$.

5. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

- (a) $P(0)$ আৰু $P(1)$ ৰ মান লিখা। 1
Write the value of $P(0)$ and $P(1)$.

- (b) বাৰ্নছাইডৰ লেমা উল্লেখ কৰা। 1
State Burnside's lemma.

- (c) পলিয়াৰ প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় গণনা উপপাদ্যটো লিখা। 3
State the Polya's first and second enumeration theorem.

অথবা / Or

Polya গণনাত Necklace সমস্যাটো চমুকৈ বৰ্ণনা কৰা।

Briefly describe the Necklace problem in Polya counting.

- (d) 4টা গুটি থকা হাৰ এটাৰ সুকীয়া ৰং গণনা কৰিবলৈ Polya's enumeration উপপাদ্য ব্যৱহাৰ উল্লেখ কৰা। 3

Use Polya's enumeration theorem to count distinct colouring of a necklace with 4 beads using colours.

- (e) এটা সংখ্যা n ৰ পূৰ্ণসংখ্যা বিভাজন সংজ্ঞা লিখা। লগতে 6 ৰ সকলো পূৰ্ণসংখ্যা বিভাজন উল্লেখ কৰা। 4

Define the integer partition of a number n . Also find all integer partition of 6.
