

Total No. of Printed Pages—8

3 SEM FYUGP MTHC3A

2 0 2 4

(December)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC3A

(Theory of Real Functions)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) যদি $A \subseteq \mathbb{R}$ আৰু c , A ৰ এটা ক্লাষ্টাৰ বিন্দু হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ ৰ}$$

কেৱল এটা মাত্ৰ সীমা থাকিব, য'ত $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

2

If $A \subseteq \mathbb{R}$ and c is a cluster point of A , then show that

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

can have only one limit, where $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

(2)

অথবা / Or

যদি (If)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

য'ত $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে প্রতিটো অভিসারী অনুক্রম (x_n) ৰ বাবে যাৰ সীমা c , আন এটা অভিসারী অনুক্রম $(f(x_n))$ থাকিব যাৰ সীমা হ'ব L . ($x_n \neq c$)

where $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ with $A \subseteq \mathbb{R}$, then show that for every convergent sequence (x_n) converging to c , the sequence $(f(x_n))$ will converge to L . ($x_n \neq c$)

- (b) ε - δ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে
Use ε - δ definition to show that

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

2

অথবা / Or

যদি (If)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L; L \in \mathbb{R}$$

য'ত c , $A(A \subseteq \mathbb{R})$ ৰ এটা ক্লাষ্টাৰ বিন্দু আৰু $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

where c is a cluster point of $A(A \subseteq \mathbb{R})$ and $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, then show that

$$\lim_{x \rightarrow c} |f(x) - L| = 0$$

(3)

- (c) যদি $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; c , A ৰ এটা ক্লাষ্টাৰ বিন্দু আৰু $\lim_{x \rightarrow c} f$ ৰ মান থাকে, তেন্তে

দেখুওৱা যে

If $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; c is a cluster point of A and $\lim_{x \rightarrow c} f$ exists, then show that

$$\lim_{x \rightarrow c} |f| = \left| \lim_{x \rightarrow c} f \right|$$

য'ত (where)

$$|f|(x) := |f(x)| \quad \forall x \in A$$

4

2. (a) ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ অনুক্রমৰ সূত্রটো লিখা। 1

State the sequential criterion for continuity of a function.

- (b) যদি f সুষমভাৱে $A(A \subseteq \mathbb{R})$ ত অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $|f(x)| \geq k > 0 \quad \forall x \in A$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\frac{1}{f}$ সুষমভাৱে A ত অবিচ্ছিন্ন হ'ব। 2

If f is uniformly continuous on $A \subseteq \mathbb{R}$ and $|f(x)| \geq k > 0 \quad \forall x \in A$, then show that $\frac{1}{f}$ is uniformly continuous on A .

- (c) অনুক্রমৰ চৰ্ত ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ফলনটো $x=0$ ত
অবিচ্ছিন্ন নয় বুলি দেখুওৱা :

3

Use sequential criterion to show that
the following function is not continuous
at $x=0$:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

- (d) যদি $f:A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ কোনো এটা বিন্দু $c \in A$ ত
অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $g(x)=|x| \forall x \in \mathbb{R}$, তেন্তে
দেখুওৱা যে $|f|$, য'ত $|f|(x) := |f(x)|$, $c \in A$ ত
অবিচ্ছিন্ন হ'ব।

3

If $f:A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ be continuous at $c \in A$
and $g(x)=|x| \forall x \in \mathbb{R}$, then show that $|f|$
defined by $|f|(x) := |f(x)|$ is continuous
at $c \in A$.

অথবা / Or

যদি (If) $f(x)=1 \forall x \in \mathbb{R}$ আৰু (and)

$$g(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে দুয়োটা ফলন $g \circ f$ আৰু $f \circ g$
অবিচ্ছিন্ন $\forall x \in \mathbb{R}$.

then show that both $g \circ f$ and $f \circ g$ are
continuous $\forall x \in \mathbb{R}$.

- (e) সুসম অবিচ্ছিন্নতাৰ সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। $1+2=3$

State and prove the uniform continuity
theorem.

অথবা / Or

যদি $f:I \rightarrow \mathbb{R}$, I ত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে
 $f(I) = [m, M]$, য'ত

If $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous on I , then show
that $f(I) = [m, M]$, where

$$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}; \inf f = m; \sup f = M \quad 3$$

3. (a) কাৰাথীঅ'ডবিৰ সূত্ৰটো লিখা আৰু এই সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি
 $f(x) = x^2$ ৰ অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

2

State Caratheodory's theorem and find
the derivative of $f(x) = x^2$ using this
theorem.

- (b) যদি $f:I \rightarrow \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$; $c \in I$ ফলনটোৰ c ত
অৱকলজ থাকে আৰু এই মান ঋণাত্মক হয়, তেন্তে
দেখুওৱা যে, $f(x) > f(c) \forall x \in (c-\delta, c) \subseteq I$ য'ত
 $\delta > 0$.

3

If $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ with $I \subseteq \mathbb{R}$ and $c \in I$ and $f'(c)$
exists and is negative, then show that
 $\exists \delta > 0$ s.t. $f(x) > f(c) \forall x \in (c-\delta, c) \subseteq I$.

- (c) যদি $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $[0, 2]$ ত অবিচ্ছিন্ন, $(0, 2)$ ত অৱকলজীয় আৰু $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(2) = 1$, তেন্তে দেখুওৱা যে, $f'(c_1) = 1$; $c_1 \in (0, 1)$ আৰু $f'(c_2) = 0$; $c_2 \in (1, 2)$.

$$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3$$

If $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous on $[0, 2]$ and differentiable on $(0, 2)$ and given that $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(2) = 1$, then show that $\exists c_1 \in (0, 1)$ and $c_2 \in (1, 2)$ such that $f'(c_1) = 1$ and $f'(c_2) = 0$.

- (d) মধ্যমান সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। সূত্ৰটোৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া।

$$1+2+1=4$$

State and prove mean value theorem. Interpret the result geometrically.

- (e) মধ্যমান সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

Apply mean value theorem to show that

$$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x \quad \forall x > -1; \alpha > 1 \quad 4$$

- (f) তলৰ ফলনটোৰ সৰ্বোচ্চ/সৰ্বনিম্ন অথবা যথাযোগ্য জটিল বিন্দু নিৰূপণ কৰা :

4

Find the extrema or other critical point(s) as applicable for the following function :

$$f(x) = (x-1)^3(x+1)^3$$

4. (a) টেইলৰ আৰু মেক্লোৰিণৰ শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define Taylor's and McLaurin's series.

- (b) যদি $f : I \rightarrow \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ উত্তল ফলন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $e^{f(x)}$ ফলনটো উত্তল হ'ব। 2

If $f : I \rightarrow \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ is a convex function, then show that $e^{f(x)}$ is a convex function.

- (c) তলত দিয়া যি কোনো এটাৰ বিস্তৃতি দিয়া : 3

Expand any one of the following :

(i) e^x

(ii) $\cos x$

- (d) ক'চিৰ মধ্যমান সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। সূত্ৰটোৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া। 1+2+1=4

State and prove Cauchy's mean value theorem. Interpret the geometrical aspect of the theorem.

- (e) যদি $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ এটা মুক্ত অন্তৰাল, অৱকলজীয় হয় আৰু $f''(a)$ ৰ মান সংজ্ঞাবদ্ধ হয় $a \in I$ ত, তেন্তে 2য় অৰ্ডাৰৰ মধ্যমান সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

If $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ an open interval, is differentiable and $f''(a)$ exists at $a \in I$, then using mean value theorem of second order show that

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)\} \quad 4$$

- (f) লাগ্ৰাঞ্জৰ বাকীপদৰ সৈতে টেইলৰৰ সূত্র লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 1+4=5

State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.
