4 SEM FYUGP MINMTH4

2025

(June)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH4

(Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* সত্য নে অসত্য লিখা :

State True or False :

(i) মেট্ৰিক্স পূৰণৰ সাপেক্ষে নিৰ্ণায়ক 1 হোৱা পৰিমেয় সংখ্যাৰ 2×2 মেট্ৰিক্সৰ সংহতিটো ক্ৰমবিনিমেয় গোট। 1

The set of all 2×2 matrices with determinant 1 with entries from Q is an Abelian group under matrix multiplication.

(ii) সাধাৰণ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ সাপেক্ষে $\{x^n - 1 = 0 | x \in C\}$ এটা গোট। 1

$\{x^n - 1 = 0 | x \in C\}$ is a group under multiplication.

(b) Z_nত $j > 0$ৰ বাবে jৰ বিপৰীত কি হ'ব, লিখা। 1

Write the inverse of j in Z_n, $j > 0$.

(c) ক্ৰমবিনিময় গোটৰ সংজ্ঞা লিখা। 2

Define an Abelian group.

(d) দেখুওৱা যে সাধাৰণ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে ধণাত্মক অপৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি S এটা গোট নহয়। 2

Show that the set S of positive irrational numbers is not a group under usual multiplication composition on it.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোটত একক মৌল অনন্য। 2

Prove that identity element in a group is unique.

(f) $GL(2, Z_7)$ত $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ৰ বিপৰীত কি হ'ব? 3

Find the inverse of $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ in $GL(2, Z_7)$.

(g) প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোট Gত 3

Prove that in a group G

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \; \forall a, b, c \in G$$

(h) প্ৰমাণ কৰা যে 'X_5' সাপেক্ষে সংহতি {1, 2, 3, 4} এটা গোট। 4

Show that the set {1, 2, 3, 4} is a group with respect to 'X_5'.

2. (a) অখণ্ড সংখ্যাৰ সমষ্টি Z, বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগজ গোট Qৰ এটা উপগোট হয়নে? 1

Is the set Z of integers a subgroup of the additive group Q?

(b) $U(10)$ গোটৰ ক্ৰম কিমান? 1

Write the order of the group $U(10)$.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে গোট Gৰ কেন্দ্ৰ, Gৰ এটা উপগোট। 3

Prove that centre of a group G is a subgroup of G.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে Gৰ অৰিক্ত উপসংহতি H উপগোট হোৱাৰ প্ৰয়োজনীয় পৰ্যাপ্ত চৰ্তটো হ'ল $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$. 6

Prove that a necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup of G is that $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

অথবা / Or

চক্ৰীয় গোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে n কোটিৰ সসীম গোট এটা চক্ৰীয় গোট হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি ইয়াত n কোটিৰ এটা উপাদান থাকে।

Write the definition of cyclic group. Prove that a finite group of order n is cyclic if and only if it has an element of order n.

3. (a) অভিলম্ব উপগোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে H এটা G গোটৰ অভিলম্ব উপগোট যদি আৰু একমাত্ৰ যদি $gHg^{-1} = H \forall g \in G$. 1+4=5

Define normal subgroup. Prove that H is a normal subgroup of a group G if and only if $gHg^{-1} = H \forall g \in G$.

(b) লেগ্ৰেঞ্জৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা। 1+5=6

State and prove Lagrange's theorem.

অথবা / Or

ধৰা হ'ল, H এটা Gৰ উপগোট আৰু $a, b \in G$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে—

(i) $Ha = Hb$, যদি আৰু যদিহে $ab^{-1} \in H$;

(ii) Ha এটা Gৰ উপগোট হ'ব যদি আৰু যদিহে $a \in H$.

Let H be a subgroup of a group G and $a, b \in G$, then prove that—

(i) $Ha = Hb$ if and only if $ab^{-1} \in H$;

(ii) Ha is a subgroup of G if and only if $a \in H$.

4. (a) ক্ৰমবিনিমেয় নোহোৱা বিং এটাৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a non-commutative ring.

(b) এটা ৰিঙৰ একক মৌলৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define unit element in a ring.

(c) এটা আইডিয়েল নোহোৱা উপৰিংৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a subring which is not an ideal.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে ৰিংত থকা সকলো a, bৰ বাবে 2

Prove that for all a, b in ring R

$$a(-b) = (-a)b = -ab$$

(e) দেখুওৱা যে Z_{12} ইনটিগ্ৰেল ড'মেইন নহয়। 2

Show that Z_{12} is not an integral domain.

(f) প্ৰমাণ কৰা যে এটা ৰিং Rৰ উপসমষ্টি $S \neq \phi$, Rৰ উপৰিং হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি $a-b \in S$ আৰু $ab \in S \forall a, b \in S$. 4

Prove that a subset $S \neq \phi$ of a ring R is a sub-ring of R if and only if $a-b \in S$ and $ab \in S \forall a, b \in S$.

(g) প্ৰমাণ কৰা যে R ৰিঙৰ যি কোনো দুটা আইডিয়েল A আৰু Bৰ কাৰণে $A+B$ এটা Rৰ আইডিয়েল হয় য'ত $A+B$য়ে A আৰু B দুয়োটাকে অন্তৰ্ভুক্ত কৰি লয়। 4

Prove that for any two ideals A and B of a ring R, $A+B$ is an ideal of R containing both A and B.

(h) প্ৰমাণ কৰা যে যি কোনো সসীম শূন্যভাজক নথকা ৰিং R এটা বিভাজন আঙঠি। 4

Prove that any finite non-zero ring R without zero division is a division ring.

★★★