

5 SEM FYUGP MTHC5B

2025

(November)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC5B

(**Group Theory-II**)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) বৈশিষ্ট্যযুক্ত উপগোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1
Define characteristic subgroup.
- (b) যদি $G = \langle a \rangle$ আৰু $a^{12} = e$ হয়, $\text{Aut}(G)$ উলিওৱা। 2
Find $\text{Aut}(G)$, if $G = \langle a \rangle$ and $a^{12} = e$.
- (c) ধৰা হ'ল $f : G \rightarrow G$ যাতে $f(a) = a^n$ এটা
অট'মবফিজম। দেখুওৱা যে গোট G ৰ সকলো a ৰ বাবে
 $a^{n-1} \in Z(G)$, য'ত $Z(G)$ হ'ল গোট G ৰ কেন্দ্ৰ। 3

(2)

Let $f: G \rightarrow G$ defined as $f(a) = a^n$ be an automorphism. Show that $a^{n-1} \in Z(G)$ for all $a \in G$, where $Z(G)$ is the centre of the group G .

- (d) ধৰা হ'ল G গোটৰ G' হ'ল এটা কমিউটেটৰ উপগোট। তেন্তে প্রমাণ কৰা যে, G আবেলিয়ান হ'ব যদি আৰু যদিহে $G' = \{e\}$.

3

Let G' be the commutator subgroup of a group G . Then prove that G is Abelian if and only if $G' = \{e\}$.

- (e) ধৰা হ'ল G এটা গোট, H গোট G ৰ এটা উপগোট আৰু T গোট G ৰ এটা অট'মৰ্ফিজম। প্রমাণ কৰা যে $T(H) = \{T(h) : h \in H\}$, G গোটটোৰ এটা উপগোট। ইয়াবোপৰি, যদি গোট G ৰ H এটা সাধাৰণ উপগোট হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $T(H)$, গোট G ৰ এটা সাধাৰণ উপগোট হ'ব।

2+2=4

Let G be a group, H a subgroup of G and T an automorphism of G . Prove that $T(H) = \{T(h) : h \in H\}$ is a subgroup of G . Further, show that if H is a normal subgroup of G , then $T(H)$ is also a normal subgroup of G .

- (f) ধৰা হ'ল $\text{Inn}(G)$, গোট G ৰ সকলোবোৰ আভ্যন্তৰীণ অট'মৰ্ফিজমৰ সংহতি, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $\frac{G}{Z(G)} \cong \text{Inn}(G)$.

6

(3)

Let $\text{Inn}(G)$ be the set of all inner automorphisms on a group G , then prove that $\frac{G}{Z(G)} \cong \text{Inn}(G)$.

অথবা / Or

যদি G এটা অসীম বৃত্তীয় গোট হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $\text{Aut}(G)$, দ্বিতীয়ক্রমৰ বৃত্তীয় গোটৰ সৈতে সমকপীত।

If G is an infinite cyclic group, then show that $\text{Aut}(G)$ is isomorphic to a cyclic group of order 2.

2. (a) 48 ক্রমৰ এটা অ-আবেলিয়ান গোটৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of non-Abelian group of order 48.

- (b) একক মৌল নোহোৱা $Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3$ ৰ যি কোনো এটা মৌলৰ ক্রম কিমান হ'ব? 2

What is the order of any non-identity element in $Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3$?

- (c) $Z_5 \oplus Z_{15}$ ত থকা 5 ক্রমৰ মৌলৰ সংখ্যা কিমান উলিওৱা। 3

Find the number of elements of order 5 in $Z_5 \oplus Z_{15}$.

- (d) $U(165)$ আৰু $U(720)$ ক Z_n আকাৰৰ বৃত্তীয় যোগাত্মক গোটৰ বাহ্যিক প্রত্যক্ষ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা। 2+2=4

Express $U(165)$ and $U(720)$ as external direct product of cyclic additive groups of the form Z_n .

- (e) যদি G এটা সসীম আবেলিয়ান গোট হয় আৰু $m|O(G)$, তেন্তে দেখুওৱা যে G ৰ এটা m ক্রমৰ উপগোট থাকিব। 5

If G is a finite Abelian group and $m|O(G)$, then show that G has a subgroup of order m .

অথবা /Or

যদি G গোট, এটা সসীম - সংখ্যক উপগোট H_1, H_2, \dots, H_n ৰ আভ্যন্তরীণ প্রত্যক্ষ পূৰণফল হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে G গোটটো H_1, H_2, \dots, H_n ৰ বাহ্যিক প্রত্যক্ষ পূৰণফলৰ সৈতে সমকপীত।

If a group G is the internal direct product of a finite number of subgroups H_1, H_2, \dots, H_n , then prove that G is isomorphic to the external direct product of H_1, H_2, \dots, H_n .

3. (a) ধৰা হ'ল G গোটৰ ক্রম p^2 য'ত p মৌলিক সংখ্যা। তেন্তে দেখুওৱা যে G আবেলিয়ান। 2

Let G be a group of order p^2 , where p is a prime number. Then show that G is Abelian.

- (b) S_3 ৰ শ্রেণী সমীকরণটো উলিওৱা। 2
Find the class equation of S_3 .

- (c) ধৰা হ'ল $*: G \times A \rightarrow A$ এটা গোট ক্রিয়া। তেন্তে দেখুওৱা যে এই ক্রিয়াৰ kernelয়ে G ৰ এটা উপগোট গঠন কৰে। 3

Let $*: G \times A \rightarrow A$ be a group action. Then show that kernel of this action forms a subgroup of G .

- (d) যদি $\sigma = (12)(345)$, $\tau = (123)(45) \in S_5$, তেন্তে σ আৰু τ সংযুক্ত হয়নে নির্ধারণ কৰা। লগতে যদি ইহঁত সংযুক্ত হয়, তেন্তে এটা মৌল $\rho \in S_5$ বিচাৰি উলিওৱা যাতে $\rho\sigma\rho^{-1} = \tau$ হয়। 3

If $\sigma = (12)(345)$, $\tau = (123)(45) \in S_5$, then determine whether σ and τ are conjugate. Further, if they are conjugate, then find an element $\rho \in S_5$ such that $\rho\sigma\rho^{-1} = \tau$.

- (e) ধৰা হ'ল G এটা গোট। প্রমাণ কৰা যে
 $\rho(g, a) = g \cdot a = gag^{-1}$ ব দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত
 $\rho: G \times G \rightarrow G$ ফলনটো এটা গোট ক্রিয়া। যদিহে G
 আবেলিয়ান হয়, তেন্তে এই ক্রিয়াটো ট্ৰিভিয়েল ক্রিয়া
 হয়নে? ইয়াৰ কৰ্ণেল আৰু ষ্টেবলাইজাৰ Ga উলিওৱা।

$$2+1+2=5$$

Let G be a group. Prove that the
 mapping $\rho: G \times G \rightarrow G$ defined by
 $\rho(g, a) = g \cdot a = gag^{-1}$ is a group action.
 Is this action a trivial action if G
 is Abelian? Find its kernel and
 stabilizer Ga .

অথবা / Or

ধৰা হ'ল G এটা গোট আৰু $O(G) = p^n$ য'ত p
 এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $n \geq 1$ । তেন্তে দেখুওৱা যে
 $Z(G) \neq \{e\}$.

5

Let G be a group and $O(G) = p^n$, where
 p is a prime number and $n \geq 1$. Then
 show that $Z(G) \neq \{e\}$.

4. (a) “56 ক্রমৰ গোট এটা সৰল।” কথাষাৰ সঁচানে? 1
 “A group of order 56 is simple.” Is this
 statement true?
 (b) S_3 ৰ সকলো চাইল' 3-উপগোটবোৰ উলিওৱা। 2
 Find all Sylow 3-subgroups of S_3 .

- (c) ধৰা হ'ল G গোটৰ ক্রম pq য'ত p আৰু q মৌলিক
 সংখ্যা যাতে $p < q$ আৰু $p \nmid q-1$ । তেন্তে দেখুওৱা যে
 G এটা বৃত্তীয় গোট। 3

Let G be a group of order pq , where
 p and q are primes such that $p < q$ and
 $p \nmid q-1$. Then show that G is a cyclic
 group.

- (d) প্রমাণ কৰা যে এটা সসীম গোট G ৰ যি 'কোনো দুটা
 চাইল' p -উপগোট গোট G ত সংযুক্ত হয়। 5

Prove that any two Sylow p -subgroups
 of a finite group G are conjugate in G .

অথবা / Or

ধৰা হ'ল G এটা সসীম গোট। দেখুওৱা যে গোট G ৰ
 চাইল' p -উপগোটৰ সংখ্যা $1 + kp$ আকাৰৰ হয়, য'ত
 $1 + kp \mid O(G)$ আৰু $k \geq 0$.

Let G be a finite group. Show that the
 number of Sylow p -subgroups of G is
 of the form $1 + kp$, where $1 + kp \mid O(G)$ and
 $k \geq 0$.
