

3 SEM FYUGP MTHC3A

2025

(Nov/Dec)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC3A

(Theory of Real Functions)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) বাস্তব সংখ্যার সসীম উপসংহতি এটার কিয় গুচ্ছ বিন্দু নাথাকে, ব্যাখ্যা কৰা। 1

Explain why a finite subset of real numbers does not have a cluster point.

- (b) যদি (If)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

য'ত (where)

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে f ফলনটো c ৰ কোনো এক
প্রতিবেশত আবদ্ধ হ'ব। 2

then show that the function f is
bounded on some neighbourhood of c .

(2)

অথবা / Or

$|x-1|$ ত এটা চৰ্ত নিৰূপণ কৰা যিটোৰে নিশ্চিত কৰিব যে

Determine a condition on $|x-1|$ that will assure that

$$|x^2 - 1| < \frac{1}{2}$$

- (c) স্কুইজ প্ৰমেয় ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে
Use squeeze theorem to show that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3

- (d) যদি $c \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ ব এক গুচ্ছ বিন্দু হয়,
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ আৰু যদি (i) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, তেন্তে
দেখুওৱা যে

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap V_\delta(c)$$

আৰু যদি (ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) < 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in A \cap V_\delta(c)$$

5

If $c \in \mathbb{R}$ is a cluster point of $A \subseteq \mathbb{R}$,
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ and if (i) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, then
show that

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap V_\delta(c)$$

and if (ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) < 0$, then show that

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in A \cap V_\delta(c)$$

(3)

2. (a) দেখুওৱা যে প্ৰত্যেক বহুপদীয় ফলন অবিচ্ছিন্ন। 2

Show that every polynomial function is continuous.

- (b) যদি $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$ য'ত $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$
আৰু $(\sqrt{f})(x) := \sqrt{f(x)}$; $x \in A$ আৰু f যদি A ত
অবিচ্ছিন্ন, তেন্তে $\sqrt{f}$, A ত অবিচ্ছিন্ন হ'ব। 3

If $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$ where $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$
and $(\sqrt{f})(x) := \sqrt{f(x)}$; $x \in A$ and f is
continuous on A , then $\sqrt{f}$ is continuous
on A .

অথবা / Or

দেখুওৱা যে সকলো-বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে ডিৰিচলেটৰ
ফলন বিচ্ছিন্ন।

Show that Dirichlet's function is
discontinuous for all real numbers.

- (c) দিয়া আছে $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in A$ ত
অবিচ্ছিন্ন। যদি $\forall \varepsilon > 0$, c ব এক δ -প্ৰতিবেশ $V_\delta(c)$
থাকে যাতে যদি $x, y \in V_\delta(c) \cap A$, তেন্তে দেখুওৱা
যে

Given $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ is continuous at
 $c \in A$. If $\forall \varepsilon > 0 \exists$ a δ -nbd $V_\delta(c)$ of c s.t. if
 $x, y \in V_\delta(c) \cap A$, then show that

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

3

(4)

- (d) অৱস্থিতি মূল প্ৰমেয় সাধাৰণীকৃত কৰিলে পোৱা উপপাদ্যৰ
বিবৃতি দি ইয়াক প্ৰমাণ কৰা। $1+2=3$

State the theorem found on
generalization of the location of roots
theorem and prove it.

অথবা / Or

যদি $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R}$ সুসমভাৱে A ত
অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f+g$ ও A ত
সুসমভাৱে অবিচ্ছিন্ন হ'ব।

3

If $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R}$ both are uniformly
continuous on A , then show that $f+g$ is
also uniformly continuous on A .

3. (a) $f(x)=|x|$ ফলনটোৰ আপেক্ষিক চৰম মান কি হ'ব?
চৰম মানৰ সংজ্ঞাৰ সহায়ত প্ৰতিপন্ন কৰা।

2

What is the relative extremum of
 $f(x)=|x|$? Justify with the help of
definition of extremum.

- (b) যদি $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ অৱকলনীয় হয় আৰু
 $|f'(x)| < M; M > 0 \forall x \in (a, b)$, তেন্তে
দেখুওৱা যে f সুসমভাৱে (a, b) ত অবিচ্ছিন্ন হ'ব।

3

If $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable and
 $|f'(x)| < M; M > 0 \forall x \in (a, b)$, then show
that f is uniformly continuous on (a, b) .

(5)

- (c) ধৰা হওক $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, য'ত I এটা অন্তৰাল,
অৱকলনীয়। দেখুওৱা যে, f হ্ৰাসমান ফলন হ'ব যদি
আৰু যদিহে $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$.

3

Let $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, where I is an interval, be
differentiable. Show that f is decreasing
if and only if $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$.

অথবা / Or

মধ্যমান প্ৰমেয় ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

Use mean value theorem to show that

$$-x \leq \sin x \leq x \forall x \geq 0$$

- (d) যদি $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $f'(x) \neq 0$,
 $x \in (0, 1)$, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and
 $f'(x) \neq 0$ for $x \in (0, 1)$, then show that

$$f(0) \neq f(1)$$

3

- (e) যদি (If)

$$f(x) = \log x; x \in [a, b]; 0 < a < b$$

তেন্তে দেখুওৱা যে

then show that

$$\frac{b-a}{b} < \log x < \frac{b-a}{a}$$

4

- (f) চৰম মান নিৰ্ণয়ৰ প্ৰথম অৱকলজ পৰীক্ষাৰ বিবৃতি লিখি-
প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove the first derivative test for detection of extremum.

4. (a) ক'চিৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া। 2

State the geometrical interpretation of Cauchy's mean value theorem.

- (b) যদি $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, য'ত I এটা অন্তৰাল, উত্তল ফলন হয়, $f+g$ সম্পৰ্কত তোমাৰ মত প্ৰকাশ কৰা।
প্ৰয়োজনীয় যুক্তি প্ৰদৰ্শন কৰিবা। 1+2=3

If $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, where I is an interval, are convex functions, what is your opinion about $f+g$? Justify with reason.

- (c) $\tan^{-1} x$ ৰ বাবে মেৰু'বিণৰ শ্ৰেণী নিৰ্ণয় কৰা আৰু
দেখুওৱা যে

Find Maclaurin's series for $\tan^{-1} x$ and deduce that

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad 3$$

- (d) $f(x) = x^3$ ৰ আপেক্ষিক চৰম মান আছে নে নাই,
অনুসন্ধান কৰা। 3

Investigate whether $f(x) = x^3$ has a relative extreme value or not.

- (e) দেখুওৱা যে যদি $x > 0$, তেন্তে
Show that if $x > 0$, then

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x \quad 3$$

- (f) টেইলৰ উপপাদ্য লিখি প্ৰমাণ কৰা। 5
State and prove Taylor's theorem.
