

3 SEM FYUGP MTHC3B

2 0 2 5

(Nov/Dec)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC3B

(Group Theory—I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) n ক্রমের চক্রীয় ঘূর্ণন গোষ্ঠের সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define cyclic rotation group of order n .

- (b) D_3 বাবে এটা সম্পূর্ণ Cayley তালিকা উপস্থাপন
করা। D_3 এবেলিয়ান হয়নে? 3+1=4

Write out a complete Cayley table for D_3 .
Is D_3 abelian?

- (c) প্রমাণ করা যে কোয়ার্টারনিয়ন গোষ্ঠেটো এবেলিয়ান নহয়। 5

Prove that quaternion group is not
abelian.

(2)

অথবা / Or

G গোট এটাৰ ক্ষেত্ৰত তলত দিয়াবোৰ প্ৰমাণ কৰা : $2+3=5$

In a group G , prove the following :

(i) মাত্ৰ এটা identity মৌল থাকে।

There is only one identity element.

(ii) সোঁ আৰু বাওঁ বাতিলৰ সূত্ৰ প্ৰযোজ্য হয়।

The right and left cancellation laws hold.

2. (a) এটা গোটৰ কেন্দ্ৰ সংজ্ঞায়িত কৰা।

1

Define center of a group.

(b) ধৰা হওক G এটা গোট আৰু H এটা G ৰ অবিভক্ত উপসংহতি। যদি ab^{-1} , H ত থাকে য'ত a আৰু b , H ত থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে H , G ৰ এটা উপগোট।

3

Let G be a group and H a non-empty subset of G . If ab^{-1} is in H whenever a and b are in H , then prove that H is a subgroup of G .

(c) যি কোনো গোটত এটা মৌল আৰু ইয়াৰ বিপৰীতমুখী মৌলৰ ক্ৰম একে বুলি প্ৰমাণ কৰা।

3

Prove that in any group, an element and its inverse have the same order.

(3)

(d) প্ৰমাণ কৰা যে 2 ক্ৰমৰ দুটা মৌল থকা এটা এবেলিয়ান গোটৰ 4 ক্ৰমৰ এটা উপগোট থাকেই।

4

Prove that an abelian group with two elements of order 2 must have a subgroup of order 4.

অথবা / Or

ধৰা হওক G এটা গোট আৰু H , G ৰ এটা উপগোট। যদি $N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $N(H)$, G ৰ এটা উপগোট।

Let G be a group and let H be a subgroup of G . If

$$N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$$

then prove that $N(H)$ is a subgroup of G .

3. (a) “এটা সসীম চক্ৰীয় গোটত, এটা মৌলৰ ক্ৰমে গোটটোৰ ক্ৰমক বিভাজিত নকৰে।” শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা।

1

“In a finite cyclic group, the order of an element does not divide the order of the group.” Write True or False.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো চক্ৰীয় গোট এটা এবেলিয়ান গোট।

2

Prove that every cyclic group is an abelian group.

(4)

- (c) মৌলিক ক্রমৰ প্ৰতিটো গোট চক্ৰীয় বুলি প্ৰমাণ কৰা। 4

Prove that every group of prime order is cyclic.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে চক্ৰীয় গোটৰ প্ৰতিটো উপগোট চক্ৰীয়।

Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

- (d) প্ৰমাণ কৰা যে এটা সসীম গোটৰ প্ৰতিটো ক্ৰমবিন্যাসক এটা চক্ৰ বা বিচ্ছিন্ন চক্ৰৰ গুণফল হিচাপে লিখিব পাৰি। 4

Prove that every permutation of a finite set can be written as a cycle or as a product of disjoint cycles.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে n ডিগ্ৰীৰ সকলো যুগ্ম ক্ৰমবিন্যাসৰ A_n গোটটোৰে ক্ৰমবিন্যাস গুণনৰ সাপেক্ষে $\frac{n!}{2}$ ক্ৰমৰ এটা সসীম গোট গঠন কৰে।

Prove that the set A_n of all even permutations of degree n forms a finite group of order $\frac{n!}{2}$ with respect to permutation multiplication.

(5)

- (e) যদি G এটা সসীম গোট আৰু H , G ৰ এটা উপগোট, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $|G|$, $|H|$ ৰে বিভাজ্য। 5

If G is a finite group and H is a subgroup of G , then prove that $|H|$ divides $|G|$.

অথবা / Or

Fermat's little উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

State and prove Fermat's little theorem.

4. (a) গোটসমূহৰ বাহ্যিক প্ৰত্যক্ষ গুণফলৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা উদাহৰণ দিয়া। $1+1=2$

Define external direct product of groups. Give an example.

- (b) প্ৰমাণ কৰা যে $Z \oplus Z$ এটা চক্ৰীয় গোট নহয়। 2

Prove that $Z \oplus Z$ is not a cyclic group.

- (c) সসীম সংখ্যক সসীম গোটৰ প্ৰত্যক্ষ গুণফলত থকা এটা মৌলিক ক্ৰম মৌলটোৰ উপাদানসমূহৰ ক্ৰমৰ লঘিষ্ঠ সাধাৰণ গুণিতক বুলি প্ৰমাণ কৰা। 3

Prove that the order of an element in a direct product of a finite number of finite groups is the least common multiple of the orders of the components of the element.

- (d) ধরা হওক G আৰু H সসীম চক্ৰীয় গোট। প্রমাণ কৰা যে $G \oplus H$ চক্ৰীয় যদি আৰু যদিহে $|G|$ আৰু $|H|$ পরস্পর মৌলিক হয়।

4

Let G and H be finite cyclic groups. Prove that $G \oplus H$ is cyclic if and only if $|G|$ and $|H|$ are relatively prime.

অথবা / Or

সসীম এবেলিয়ান গোটৰ বাবে ক'চিৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা আৰু প্রমাণ কৰা।

State and prove Cauchy's theorem for finite abelian groups.

5. (a) এটা সমকপতাৰ কাৰ্ণেল সংজ্ঞায়িত কৰা।

1

Define kernel of a homomorphism.

- (b) ধরা হওক ϕ এটা G গোটৰ পৰা $\bar{G}$ গোটলৈ সমকপতা আৰু g , G ৰ এটা মৌল। প্রমাণ কৰা যে যদি $|g|$ সসীম, তেন্তে $|g|$, $|\phi(g)|$ ৰে বিভাজ্য।

2

Let ϕ be a homomorphism from a group G to a group $\bar{G}$ and let g be an element of G . Then prove that if $|g|$ is finite, then $|\phi(g)|$ divides $|g|$.

- (c) প্রমাণ কৰা যে $Z_8 \oplus Z_2$ ৰ পৰা $Z_4 \oplus Z_4$ লৈ কোনো সমকপতা নাই।

3

Prove that there is no homomorphism from $Z_8 \oplus Z_2$ onto $Z_4 \oplus Z_4$.

- (d) ধরা হওক ϕ , G ৰ পৰা $\bar{G}$ লৈ এটা গোট সমকপতা। প্রমাণ কৰা যে $\frac{G}{\ker \phi}$ ৰ পৰা $\phi(G)$ লৈ,

$g \ker \phi \rightarrow \phi(g)$ দ্বাৰা দিয়া মেপিংটো এটা সমকপতা হয়।

5

Let ϕ be a group homomorphism from G to $\bar{G}$. Then prove that the mapping from $\frac{G}{\ker \phi}$ to $\phi(G)$, given by $g \ker \phi \rightarrow \phi(g)$,

is an isomorphism.

অথবা / Or

G এটা গোট আৰু H ক G ৰ যি কোনো উপগোট বুলি ধরা হওক। যদি N , G ৰ যি কোনো নৰ্মেল উপগোট হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

Let G be a group and let H be any subgroup of G . If N is any normal subgroup of G , then prove that $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

★★★