

3 SEM FYUGP PHYC3A

2025

(Nov/Dec)

PHYSICS

(Core)

Paper : PHYC3A

(Mathematical Physics—I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. তলত দিয়াসমূহৰ পৰা শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা : $1 \times 5 = 5$

Choose the correct answer from the following :

(a) $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$ অৱকলজ সমীকৰণটোৰ অৰ্ধাৰ আৰু

ডিগ্ৰী হৈছে

The order and degree of the differential equation $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$ are

- (i) অৰ্ধাৰ 1, ডিগ্ৰী 1

order 1, degree 1

- (ii) অর্ডাৰ 1, ডিগ্রী 2
order 1, degree 2
- (iii) অর্ডাৰ 2, ডিগ্রী 1
order 2, degree 1
- (iv) অর্ডাৰ 2, ডিগ্রী 2
order 2, degree 2

(b) $u = e^x \sin y$ ব প্রথম অর্ডাৰৰ আংশিক অৱকলজ কি?

What is the first-order partial derivative of $u = e^x \sin y$?

- (i) $u_x = e^x \sin y, u_y = e^x \sin y$
- (ii) $u_x = x e^x \sin y, u_x = e^x \sin y$
- (iii) $u_x = e^x \sin y, u_y = e^x \cos y$
- (iv) $u_x = e^x \sin y, u_x = -e^x \cos y$

(c) যদি $\vec{r}$ যি কোনো এটা স্থানাংক ভেক্টৰ হয়, তেন্তে $\text{div } \vec{r}$ ৰ মান হ'ব

If $\vec{r}$ is any position vector, then the value of $\text{div } \vec{r}$ is

- (i) $x + y + z$
- (ii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
- (iii) $3x + 3y + 3z$
- (iv) 3

(d) $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 xy dx dy$ ৰ মান কিমান?

What is the value of $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 xy dx dy$?

- (i) 3 (ii) 1
- (iii) 2 (iv) 0

(e) যদি $\phi(u, v, w)$ যি কোনো এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন আৰু $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ আৰু $\hat{e}_3$ স্থানাংক বক্ৰ u, v আৰু w স্পৰ্শকৰ দিশত ক্ৰমে পৰস্পৰৰ অৰ্থগনৈল একক ভেক্টৰ, তেন্তে অৰ্থগনৈল কাৰ্ভিলিনিয়াৰ স্থানাংকত

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_1} \frac{d\phi}{du} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{d\phi}{dv} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{d\phi}{dw} \hat{e}_3$$

হ'ব

If $\phi(u, v, w)$ is any scalar point function and $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ and $\hat{e}_3$ are mutually orthogonal unit vectors along the tangents to the coordinate curves u, v and w respectively, then

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_1} \frac{d\phi}{du} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{d\phi}{dv} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{d\phi}{dw} \hat{e}_3$$

in orthogonal curvilinear coordinate is the

- (i) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ গ্ৰেডিয়েন্ট
gradient of the function $\phi(u, v, w)$

(ii) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ ডাইভাৰ্জেন্স

divergence of the function $\phi(u, v, w)$

(iii) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ কাল

Curl of the function $\phi(u, v, w)$

(iv) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ লাপলাচিয়ান অপারেটৰ, ∇^2

Laplacian operator, ∇^2 of the function $\phi(u, v, w)$

2. তলত দিয়া প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

2×4=8

Answer the following questions :

(a) দেখুওৱা যে $|x|$ নিৰবিচ্ছিন্ন কিন্তু অৱকলজ কৰিব নোৱাৰি।

Show that $|x|$ is continuous but not differentiable.

(b) বংচকিয়ান (Wronskian) কি? ইয়াক কি দৰে দুটা ফলনৰ বৈখিক নিৰ্ভৰশীলতা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

What is Wronskian? How is it used to find the linear dependence of two functions?

(c) a ৰ কি মানৰ বাবে $\vec{A}$ আৰু $\vec{B}$ লম্ব হ'ব, যদি $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ আৰু $\vec{B} = 2a\hat{i} + a\hat{j} + 4\hat{k}$?

For what value of a , $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular, if $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{B} = 2a\hat{i} + a\hat{j} + 4\hat{k}$?

(d) দেখুওৱা যে এখন সমতলৰ বাবে গ্ৰীনৰ উপপাদ্য ভেট্টৰত

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_R \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{k} dR$$

Show that Green's theorem in a plane can be expressed in vector notation as

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_R \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{k} dR$$

অথবা / Or

গ্ৰীনৰ উপপাদ্যৰ দ্বাৰা দেখুওৱা যে কোনো এটা অঞ্চলৰ কালি

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

Show by Green's theorem that the area of a place can be expressed as

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

3. অৱকলজীয় সমীকৰণ এটাৰ কমপ্লিমেন্টৰি ফলন আৰু পাৰ্টিকোলাৰ ইণ্টিগ্ৰেল মানে কি? তলত দিয়া অৱকলজীয় সমীকৰণটো সমাধান কৰা

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

যদি $y(0) = 0$ আৰু $y' = \frac{1}{2}$.

2+5=7

(6)

What are the complementary function and particular integral of a differential equation? Solve the following differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

if $y(0) = 0$ and $y' = \frac{1}{2}$.

অথবা / Or

যদি $y_1 = e^{-x} \cos x$, $y_2 = e^{-x} \sin x$ আৰু

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \text{ তেন্তে বংচকিয়ান (Wronskian)}$$

নিৰ্ণায়ক গণনা কৰা। প্রমাণ কৰা যে y_1 আৰু y_2 এ প্রদত্ত অৱকলজীয় সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। $4+3=7$

If $y_1 = e^{-x} \cos x$, $y_2 = e^{-x} \sin x$ and

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \text{ then calculate the}$$

Wronskian determinant. Verify that y_1 and y_2 satisfy the given differential equation.

4. (a) দেখুওৱা যে তলত দিয়া অৱকলজীয় সমীকৰণটো একজেষ্ট আৰু এইটো সমাধান কৰা :

$$(ax + by) dx + (bx + ly) dy = 0$$

(7)

Show that the following differential equation is exact and solve it :

$$(ax + by) dx + (bx + ly) dy = 0$$

- (b) প্রদত্ত সমীকৰণৰ ইণ্টিগ্ৰেটিং ফেক্টৰ উলিয়াই সমাধান কৰা : 3

$$(xy^3 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4) dy = 0$$

Solve the given equation by finding the integrating factor :

$$(xy^3 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4) dy = 0$$

5. (a) স্কেলাৰ এটাৰ ডিৰেক্ষনেল ডেৰিভেটিভ মানে কি? $\phi = xyz$ ৰ $(-1, 1, 3)$ ত $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ৰ দিশত ডিৰেক্ষনেল ডেৰিভেটিভ উলিওৱা। $1+3=4$

What is directional derivative of a scalar? Find the directional derivative of $\phi = xyz$ at $(-1, 1, 3)$ along $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, যদি $(\vec{C} \times \vec{A}) \times \vec{B} = 0$. 4

Prove $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, if $(\vec{C} \times \vec{A}) \times \vec{B} = 0$.

- (b) যদি $\vec{r}$ যি কোনো স্থানাংক ভেক্টৰ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $r^n \vec{r}$ অঘূৰ্ণ ভেক্টৰ। 3

If $\vec{r}$ is any position vector, then show that $r^n \vec{r}$ is irrotational vector.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$. 3

Prove that $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$

6. (a) গাউছৰ ডাইভাৰজেন্স উপপাদ্যটো লিখা। $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S}$ ৰ মান উলিওৱা, য'ত $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ আৰু S ঘনকৰ পৃষ্ঠ, যাৰ চাৰিসীমা হ'ল $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$. 2+5=7

State Gauss' divergence theorem.

Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S}$, where

$\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ and S is the surface of the cube bounded by $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

- (b) জেকবিয়ান ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা $u = \frac{x-y}{x+y}$,

$v = \frac{xy}{(x+y)^2}$ ফলন দুটা এটা আনটোৰ অনিৰ্ভৰশীল

নহয়। সিহঁতৰ মাজৰ সম্বন্ধ উলিওৱা। 4

Use the Jacobian to prove that the functions $u = \frac{x-y}{x+y}$, $v = \frac{xy}{(x+y)^2}$ are not independent of one another. Find the relation between them.

অথবা / Or

ষ্টকৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad 4$$

Show by using Stokes' theorem that

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

7. কাৰ্ভিলিনিয়াৰ স্থানাংকবোৰ কি? গোলকীয় প'লাৰ স্থানাংকত গ্ৰেডিয়েণ্টৰ প্ৰকাশবাশি উলিওৱা। 2+5=7

What are curvilinear coordinates? Find the expression for gradient in spherical polar coordinates.

8. (a) সূত্র আৰু ধৰ্মৰ দ্বাৰা ডিৰাক ডেল্টা ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা। 2

Discuss about Dirac delta function with its definition and properties.

(b) যদি $\vec{r}$ যি কোনো স্থানাংক ভেক্টৰ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $r^n \vec{r}$ অঘূৰ্ণ ভেক্টৰ।

3

If $\vec{r}$ is any position vector, then show that $r^n \vec{r}$ is irrotational vector.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$.

3

Prove that $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$

6. (a) গাউছৰ ডাইভাৰজেন্স উপপাদ্যটো লিখা। $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S}$ ৰ

মান উলিওৱা, য'ত $\vec{F} = 4xzi - y^2j + yzk$ আৰু S ঘনকৰ পৃষ্ঠ, যাৰ চাৰিসীমা হ'ল $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

2+5=7

State Gauss' divergence theorem.

Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S}$, where

$\vec{F} = 4xzi - y^2j + yzk$ and S is the surface of the cube bounded by $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(b) জেকবিয়ান ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা $u = \frac{x-y}{x+y}$,

$v = \frac{xy}{(x+y)^2}$ ফলন দুটা এটা আনটোৰ অনিৰ্ভৰশীল

নহয়। সিহঁতৰ মাজৰ সম্বন্ধ উলিওৱা।

4

Use the Jacobian to prove that the functions $u = \frac{x-y}{x+y}$, $v = \frac{xy}{(x+y)^2}$ are not

independent of one another. Find the relation between them.

অথবা / Or

ষ্টকৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

4

Show by using Stokes' theorem that

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

7. কাৰ্ভিলিনিয়াৰ স্থানাংকবোৰ কি? গোলকীয় প'লাৰ স্থানাংকত গ্ৰেডিয়েণ্টৰ প্ৰকাশবাশি উলিওৱা।

2+5=7

What are curvilinear coordinates? Find the expression for gradient in spherical polar coordinates.

8. (a) সূত্র আৰু ধৰ্মৰ দ্বাৰা ডিৰাক ডেল্টা ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা।

2

Discuss about Dirac delta function with its definition and properties.

(10)

- (b) ডিৰাক ডেল্টা ফলনৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়াটোৰ মান উলিওৱা :

2

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} \delta(t-2) dt$$

Evaluate the following using the properties of Dirac delta function :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} \delta(t-2) dt$$

9. (a) হাৰ্মিচিয়ান মেট্ৰিক্স কি ?

1

What is Hermitian matrix?

- (b) তলত দিয়া মেট্ৰিক্সটোৰ P মেট্ৰিক্স উলিওৱা যাতে $P^{-1}AP$ ডায়েগনেল মেট্ৰিক্স হয় :

5

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Find matrix P of the following matrix such that $P^{-1}AP$ is diagonal matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(11)

অথবা / Or

তলত দিয়া মেট্ৰিক্সটো ডায়েগনেল মেট্ৰিক্সত পৰিৱৰ্তন কৰা : 5

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix into a diagonal matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$
