Total No. of Printed Pages—8

1 SEM TDC MTMN (CBCS) DSC 1

2021

(March)

MATHEMATICS

(Discipline Specific Course)

Paper : DSC–1

[Differential Calculus]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. (a) এটা ফলনৰ বাস্তৱ সংখ্যা ৰেখাত সীমা বুলিলে কি বুজা? 1

What do you mean by limit of a function on the real line?

(b) যদি $y = 2000$ হয়, তেন্তে y_n ৰ মান কিমান? 1

If $y = 2000$, then what is the value of y_n?

(c) যদি $x^2 + y^2 = a^2$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ ৰ মান লিখা। 1

If $x^2 + y^2 = a^2$, then write the value of $\frac{dy}{dx}$.

2. (a) দোদুল্যমান বিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $x = 0$, তেন্তে ফলনটোৰ দোদুল্যমান বিচ্ছিন্নতাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা। 3

Define oscillatory discontinuity. If $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $x = 0$, then discuss about oscillatory discontinuity of the function.

অথবা / Or

$(\varepsilon - \delta)$ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো $x = 0$ ৰ বাবে অনৰছিন্ন :

$$f(x) = x\cos\frac{1}{x}\ ; \quad \text{if } x \neq 0$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{if } x = 0$$

Apply $(\varepsilon - \delta)$ definition to show that the following function is continuous at $x = 0$:

$$f(x) = x\cos\frac{1}{x}\ ; \quad \text{if } x \neq 0$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{if } x = 0$$

(b) প্ৰমাণ কৰা যে $f(x) = |x - 1|$ ফলনটো অনৰছিন্ন কিন্তু $x = 1$ বিন্দুত অৱকলজীয় নহয়। 2

Prove that the function $f(x) = |x - 1|$ is continuous but not derivable at the point $x = 1$.

3. *(a)* যদি $y = \log[(ax+b)(cx+d)]$ হলে y_nৰ মান উলিওৱা। 4

If $y = \log[(ax+b)(cx+d)]$, then find the value of y_n.

(b) যদি $y = e^{a\sin^{-1}x}$, দেখুওৱা যে

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)\, x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$ 5

If $y = e^{a\sin^{-1}x}$, show that

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)\, x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$

অথবা / *Or*

যদি $y = \tan^{-1} x$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1+x^2) y_{n+2} + 2(n+1) x y_{n+1} + n(n+1) y_n = 0$$

If $y = \tan^{-1} x$, then prove that

$$(1+x^2) y_{n+2} + 2(n+1) x y_{n+1} + n(n+1) y_n = 0$$

4. *(a)* যদি $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ 3

If $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(b) যদি $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, দেখুওৱা যে

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1-4\sin^2 u)\sin 2u$$ 5

If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, show that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1-4\sin^2 u)\sin 2u$$

অথবা / *Or*

যদি $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, দেখুওৱা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

If $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

5. *(a)* এটা প্ৰতিলোম ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define an inverse function

(b) সুষম অনৱচ্ছিন্নতাৰ এটা ধাৰণা দিয়া। 1

Give an idea about uniform continuity.

(c) একোটা ফলনৰ বিচ্ছিন্নতা কেইপ্ৰকাৰৰ হ'ব পাৰে, লিখা। 2

Write down the different types of discontinuity of a function.

(d) যদি $y = x^2$, তেন্তে ফলনটোৰ (1, 1) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় ক'ৰা। 3

If $y = x^2$, then find out the radius of curvature of the function at the point (1, 1).

6. *(a)* প্ৰমাণ কৰা যে $y^2 = 4ax$ বক্ৰটোৰ অভিলম্বই $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ বক্ৰটো স্পৰ্শ কৰে। 4

Prove that the normal of the curve $y^2 = 4ax$ touches the curve $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$.

(b) $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$ ফলনটিৰ গ্ৰাফ অংকন কৰা। 5

Trace the graph of the function $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$.

অথবা / Or

$(y - a)^2(x^2 - a^2) = x^4 + a^4$ বক্ৰটোৰ অসীম-স্পৰ্শীবোৰ উলিওৱা।

Find all asymptotes of the curve $(y - a)^2(x^2 - a^2) = x^4 + a^4$

7. *(a)* গৰকীয় বক্ৰৰ বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধৰ সমীকৰণটো লিখা। 2

Write down the pedal form of equation of radius of curvature.

(b) এটা ফলনৰ (বক্ৰ) অসীমস্পৰ্শীবোৰৰ সন্বন্ধে ধাৰণা উদাহৰণসহ বুজায় লিখা। 2

Illustrate about the asymptotes of a function (curve) with the help of examples.

(c) $x^2 - y^2 = a^2$ আৰু $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$ বক্ৰ দুটাই ছেদ কৰি উৎপন্ন কৰা কোণটো উলিওৱা। 5

Find the angle of intersection of the two curves $x^2 - y^2 = a^2$ and $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$.

অথবা / Or

এষ্ট্ৰইদ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বাবে গৰকীয় সমীকৰণটো উলিওৱা।

Find the pedal equation of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

8. *(a)* যদি $f(x) = |x|$, তেন্তে ফলনটোৰ $x = 0$ বিন্দুত অৱকলজ হয়নে? 2

If $f(x) = |x|$, then, does derivative of the function exist at $x = 0$?

(b) ৰ'লচ্‌ৰ উপপাদ্যটো লিখা। 2

Write down the Rolle's theorem.

(c) মধ্যমান উপপাদ্যৰ সহায়তা $(28)^{1/3}$ ৰ সাংখ্যিক আসন্নমান ঠিৰাং কৰা। 2

Using mean value theorem, find the numerical approximation of $(28)^{1/3}$.

(d) যদি $f'(x)=0$ হয় $[a, b]$ অন্তৰালত, তেন্তে $f(x)$ এটা ধ্ৰুৱ হ'ব লাগিব। 2

If $f'(x)=0$ in $[a, b]$, then $f(x)$ is constant thereat.

(e) ক'চিৰ মধ্যমান উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove Cauchy's mean value theorem.

অথবা / Or

তলৰ যি কোনো **এটাৰ** মান নিৰ্ণয় কৰা :

Evaluate any *one* of the following :

(i) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$

9. (a) লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Lagrange's mean value theorem.

(b) $f(x)=1-x^{2/3}$ ফলনটো $x\in[-1, 1]$ অন্তৰালত ৰ'লচ্ৰ উপপাদ্যটো পৰীক্ষা কৰা। 4

Verify Rolle's theorem for $f(x)=1-x^{2/3}$ in $x\in[-1, 1]$.

অথবা / Or

মেক্লোৰিন শ্ৰেণীৰ দ্বাৰা $f(x)=(1+x)^3$ ক x ৰ ঘাতত প্ৰসাৰণ কৰা।

Expand Maclaurin's series in powers of x for $f(x)=(1+x)^3$.

10. (a) টেইলৰৰ সূত্ৰটো সাধাৰণ অৱশিষ্ট আকাৰত উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ ক'ৰা। 5

State and prove Taylor's theorem with generalised form of remainder.

অথবা / Or

$\sin x$ সীমিত শ্ৰেণীটো লাগ্ৰাঞ্জৰ অৱশিষ্টৰ সৈতে x ৰ ঘাতত প্ৰসাৰণ কৰা।

Expand $\sin x$ in a finite series in powers of x, with Lagrange's remainder.

(b) তলৰ যি কোনো **এটাৰ** চৰম মান উলিওৱা : 4

Evaluate extreme value of any *one* of the following :

(i) $f(x)=x^3-6x^2+9x+50$

(ii) $f(x)=4x+\tan 3x$

★★★