Total No. of Printed Pages—15

2 SEM TDC GEMT (CBCS) 2 (A/B)

2023

(May/June)

MATHEMATICS

(Generic Elective)

Paper : GE–2

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Paper : GE–2 (A)

(Differential Equations)

1. (a) অৱকল সমীকৰণৰ অনুকল উৎপাদক বুলিলে কি বুজা ? 1

    What do you mean by an integrating factor of a differential equation?

   (b) দেখুওৱা যে তলৰ অৱকলীয় সমীকৰণটো যথাৰ্থ নহয় : 1

    Show that the following differential equation is not exact :

$$y\,dx+2x\,dy=0$$

(c) ইন্সপেকচন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ অৱকলীয় সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 2

Solve by the method of inspection of the following differential equation :

$$x\,dy - y\,dx = xy^2\,dx$$

(d) যি কোনো তিনিটাৰ সমাধান কৰা : 4×3=12

Solve any *three* :

(i) $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$

(ii) $y(1 + xy)\,dx + x(1 - xy)\,dy = 0$

(iii) $(x^2y - 2xy^2)\,dx - (x^3 - 3x^2y)\,dy = 0$

(iv) $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0$

(v) $x\,dy - y\,dx + a(x^2 + y^2)\,dx = 0$

2. (a) দেখুওৱা যে $1, x, x^2$ ফলনকেইটা বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ। 2

Show that the functions $1, x, x^2$ are linearly independent.

(b) প্ৰথম ক্ৰম আৰু তিনি ঘাতৰ অৱকল সমীকৰণ এটা লিখা। 1

Write a differential equation of order one and degree three.

(c) যি কোনো দুটাৰ সমাধান কৰা : 3×2=6

Solve any *two* :

(i) $xy(p^2 + 1) = (x^2 + y^2)\,p$

(ii) $y = 3x + \log p$

(iii) $y^2 \log y = xpy + p^2$

(d) প্ৰমাণ কৰা যে অৱকল সমীকৰণ $y'' - 5y' + 6y = 0$ ৰ সমাধান e^{2x} আৰু e^{3x} বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ। উক্ত সমীকৰণৰ $y(0) = 0$ আৰু $y'(0) = 1$ চৰ্তসাপেক্ষে বিশেষ সমাধান $y(x)$ নিৰ্ণয় কৰা। 6

Show that e^{2x} and e^{3x} are linearly independent solutions of $y'' - 5y' + 6y = 0$ and find the solution $y(x)$ with the properties $y(0) = 0$ and $y'(0) = 1$.

(e) ৰনস্কিয়ান ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে x, x^2, x^3 ফলনকেইটা স্বতন্ত্ৰ। এই স্বতন্ত্ৰ সমাধানকেইটাক নিৰ্দেশ কৰা অৱকল সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা। 5

Use Wronskian to show that x, x^2, x^3 are independent. Determine the differential equation with these as independent solutions.

অথবা / *Or*

যদি $y = e^{2x}$

$$(2x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

সমীকৰণৰ এটা বিশেষ সমাধান হয়, তেন্তে সমীকৰণটোৰ ক্ৰম হ্ৰাস কৰি বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান উলিওৱা।

Given that $y = e^{2x}$ is a solution of

$$(2x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

then find a linearly independent solution by reducing the order.

3. *(a)* যদি ধ্ৰুৱক সহগযুক্ত দ্বিমাত্ৰাৰ সমজাতীয় বৈখিক সমীকৰণ এটাৰ সহায়ক সমীকৰণৰ মূল $2 \pm 3i$ হয়, তেন্তে সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা। 1

If $2 \pm 3i$ are roots of the auxiliary equation corresponding to a certain second-order homogeneous linear equation with constant coefficient, then write the general solution.

(b) যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 4

Solve any *one* :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 3x^2e^x$

(c) প্ৰাচলৰ ভেদ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 6

Apply the method of variation of parameters to solve the following equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$$

অথবা / *Or*

সমাধান কৰা :

Solve :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

(d) যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 5

Solve any *one* :

(i) $(y^2 + yz)\,dx + (xz + z^2)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0$

(ii) $(yz + xyz)\,dx + (zx + xyz)\,dy + (xy + xyz)\,dz = 0$

4. *(a)* তলৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম আৰু ঘাত লিখা : 2

Write the order and degree of the following partial differential equation :

$$\left(1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 = k\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4$$

(b) তলত দিয়া সমীকৰণটোৰ পৰা এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰা : 2

Form a partial differential equation from the following equation :

$$z = a(x+y) + b$$

(c) চাৰপিটৰ নিয়মেৰে যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 6

Solve any *one* by Charpit's method :

(i) $z = p^2 + q^2$

(ii) $pxy + pq + qy = yz$

(d) লাগ্রাঞ্জৰ নিয়মেৰে যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 6

Solve any *one* by Lagrange's method :

(i) $x^2 p + y^2 q = z^2$

(ii) $(1+y)p + (1+x)q = z$

5. (a) তলৰ সমীকৰণকেইটাৰ শ্ৰেণী বিভাজন কৰা : 3+3=6

Classify the following equations :

(i) $t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

(ii) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(b) যি কোনো দুটাৰ শ্ৰেণী বিভাজন কৰা : 2+2=4

Classify any *two* :

(i) $10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$

(ii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(c) অধিবৃত্তীয় দ্বিতীয় ক্ৰমৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ এটা উদাহৰণ দিয়া। 1

Write an example of parabolic second-order partial differential equation.

(d) দ্বিতীয় ক্ৰমৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপ লিখা। 1

Write the general form of second-order partial differential equation.

Paper : GE–2 (B)

(Econometrics)

1. শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা/উত্তৰ দিয়া : 1×8=8

Choose the correct answer/Answer the following :

(a) প্ৰথম প্ৰকাৰ ত্ৰুটি কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল

Probability of committing type I error is

(i) দ্বিতীয় প্ৰকাৰ ত্ৰুটি

type II error

(ii) সাৰ্থকতা স্তৰ

level of significance

(iii) সদায় শূন্য

always zero

(iv) অনিৰ্ণায়ক

indeterminate

(b) ডাৰবিন-ৱাটচন d-সূচক তলৰ কোনটো নিৰ্ণয়ৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

Which of the following is detected by Durbin-Watson d-statistic?

(i) বিষম-বিচালিতা

Heteroscedasticity

(ii) স্বয়ং সহসম্বন্ধ

Autocorrelation

(iii) বহু-সংৰেখতা

Multicollinearity

(iv) নিৰ্ধাৰণ সমস্যা

Specification problem

(c) প্ৰকট বহু-সংৰেখতাৰ ক্ষেত্ৰত

In case of severe multicollinearity

(i) t মানসমূহ মহত্বহীন হয়

t values are insignificant

(ii) t মানসমূহ মহত্বপূৰ্ণ হয়

t values are significant

(iii) আকলনসমূহ পক্ষপাতমূলক হয়

estimates are biased

(iv) ওপৰৰ এটাও নহয়

None of the above

(d) নিয়ন্ত্ৰিত R^2ৰ সূত্ৰ হ'ল

The formula for adjusted R^2 is

(i) $\bar{R}^2 = (1-R^2)\dfrac{n-k}{n-1}$

(ii) $\bar{R}^2 = (1-R^2)\dfrac{n-1}{n-k}$

(iii) $\bar{R}^2 = 1-(1-R^2)\dfrac{n-1}{n-k}$

(iv) $\bar{R}^2 = 1-R^2$

(e) শুদ্ধ মডেল $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \mu$ ৰ পৰিবৰ্তে আকলন কৰা মডেল $Y = \beta_0^* + \beta_1^* X_1 + \nu$ হ'লে আকলকবোৰ হ'ব

If the estimated model $Y = \beta_0^* + \beta_1^* X_1 + \nu$ is the alternative model of $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \mu$, then the estimators will be

(i) অনিৰ্ণায়ক
indeterminate

(ii) শূন্য
zero

(iii) পক্ষপাত শূন্য
unbiased

(iv) পক্ষপাতযুক্ত
biased

(f) বিক্ত প্ৰকল্পৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Define null hypothesis.

(g) স্বয়ং সহসম্বন্ধৰ এটা কাৰণ উল্লেখ কৰা।

Mention one cause of autocorrelation.

(h) BLUE মানে কি?

What is BLUE?

2. তলৰ যি কোনো চাৰিটাৰ ওপৰত চমু টোকা লিখা : 4×4=16

Write short notes on any *four* of the following :

(a) পৰীক্ষা এটাৰ শক্তি
Power of a test

(b) স্বয়ং সহসম্বন্ধৰ পৰিণামসমূহ
Consequences of autocorrelation

(c) সংস্থাপিত অভিধাৰণা
Classical assumptions

(d) *t*-বণ্টন
t-distribution

(e) সাৰ্থকতা স্তৰ
Level of significance

(f) নিৰ্ধাৰণ সমস্যাৰ পৰিণামসমূহ
Consequences of specification problem

3. (a) (i) χ^2-পৰীক্ষাৰ ব্যৱহাৰসমূহ চমুকৈ আলোচনা কৰা। 5

Briefly discuss the uses of χ^2-test.

(ii) প্ৰথম প্ৰকাৰ ত্ৰুটি আৰু দ্বিতীয় প্ৰকাৰ ত্ৰুটিৰ মাজত পাৰ্থক্য দৰ্শোৱা। প্ৰথম প্ৰকাৰ ত্ৰুটি আৰু সাৰ্থকতা স্তৰৰ মাজত সম্বন্ধ উল্লেখ কৰা। 5+2

Distinguish between type I and type II errors. State the relationship between type I error and level of significance.

অথবা / Or

(b) (i) প্ৰাসামান্য বন্টন, t-বন্টন আৰু F-বন্টনৰ অৰ্থমীতিত ব্যৱহাৰ সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা। 8

Discuss the uses of normal distribution, t-distribution and F-distribution in econometrics.

(ii) আকলক এটাৰ পক্ষপাত শূন্য বৈশিষ্ট্যৰ বিষয়ে চমুকৈ ব্যাখ্যা কৰা। 4

Briefly explain the unbiasedness property of an estimator.

4. (a) সমাশ্ৰয়ণ সমীকৰণ $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ দিয়া থাকিলে গছ্-মাৰ্কভ উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰা। 11

Given the regression equation $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$, prove the Gauss-Markov theorem.

অথবা / Or

(b) নিম্নপ্ৰদত্ত তথ্যৰ পৰা ৰৈখিক সমাশ্ৰয়ণ সমীকৰণ Y ৰ ওপৰত X আৰু X ৰ ওপৰত Y আকলন কৰা :

Estimate linear regression equations of Y on X and X on Y from the following data :

X	:	10	8	5	4	2	1
Y	:	4	6	5	6	8	9

5. (a) k-সংখ্যক চলক ৰৈখিক সমাশ্ৰয়ণ মডেল $Y = X\beta + u$ ৰ OLS আকলক $\hat{\beta}$ ৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা। 11

Given the k-variable linear regression model $Y = X\beta + u$, state and prove the properties of the OLS estimator $\hat{\beta}$.

অথবা / Or

(b) (i) R^2 আৰু নিয়ন্ত্ৰিত R^2 ৰ পাৰ্থক্য দৰ্শোৱা। 5

Show the difference between R^2 and adjusted R^2.

(ii) সমাশ্ৰয়ণ সমীকৰণত মূক চলক কি কি কাৰণত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়? মূক চলক ফান্দে সৃষ্টি কৰা সমস্যাটো কি? 3+3

Why we include dummy variable in regression equation? What is the problem created by dummy variable trap?

6. *(a)* পূর্ণ বহু-সংৰেখতা কি আৰু ইয়াৰ পৰিণাম কি? বহু-সংৰেখতা নিৰ্ণয় কৰাৰ উপায়সমূহ আলোচনা কৰা। 3+8

What is perfect multicollinearity and what is its consequence? Discuss the methods to detect multicollinearity.

অথবা / Or

(b) বিষম-বিচালিতাৰ পৰিণামসমূহ কি কি? বিষম-বিচাৰিতা নিৰ্ণয় কৰা উপায়সমূহ আলোচনা কৰা। 3+8

What are the consequences of heteroscedasticity? Discuss the methods to detect heteroscedasticity.

7. *(a)* নিৰ্ধাৰণ সমস্যা (পক্ষপাত)ৰ প্ৰকাৰসমূহ কি কি? ধৰি লোৱা, এটা শুদ্ধ মডেল হ'ল $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + u$. কিন্তু শুদ্ধ মডেলটোৰ পৰিৱৰ্তে তুমি আকলন কৰা মডেলটো হ'ল $Y = \alpha^* + \beta_1^* X_1 + \beta_2 X_2 + v$. ইয়াৰ পৰিণামসমূহ দৰ্শোৱা। 4+7

What are the types of specification problem (bias)? Suppose, a true model is $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + u$. But instead of the true model you have estimated the model $Y = \alpha^* + \beta_1^* X_1 + \beta_2 X_2 + v$. Show the consequences.

অথবা / Or

(b) নিৰ্ধাৰণ সমস্যা নিৰ্ণয় কৰা প্ৰচলিত পৰীক্ষাসমূহ আলোচনা কৰা। 11

Discuss the available tests to detect specification problem.

★★★